NMSA334: cvičení 5 – nerozložitelné řetězce, stacionární rozdělení

Pro klasifikaci stavů se často hodí pojem nerozložitelnosti. Markovův řetězec je *nerozložitelný*, jestliže každý jeho stav je dosažitelný z každého jiného stavu. Důležitá jsou následující tři tvrzení:

a) v nerozložitelném řetězci jsou všechny stavy stejného typu,

b) v řetězci s konečně mnoha stavy nemohou být všechny stavy přechodné,

c) v řetězci s konečně mnoha stavy neexistují trvalé nulové stavy.

Odtud plyne, že v nerozložitelném řetězci s konečně mnoha stavy jsou všechny stavy trvalé nenulové.

Pravděpodobnostní rozdělení $\boldsymbol{\pi}$, které splňuje $\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\pi}^{T}\boldsymbol{P}$, se nazývá *stacionární rozdělení*. V nerozložitelném řetězci stacionární rozdělení existuje právě tehdy, když jsou všechny stavy trvalé nenulové. Existence stacionárního rozdělení se tak dá použít jako kritérium při klasifikaci stavů.

V případě, že stacionární rozdělení v nerozložitelném řetězci neexistuje, jsou buď všechny jeho stavy přechodné, nebo všechny trvalé nulové. K rozlišení, který z těchto případů nastává, vyřešíme soustavu rovnic $\boldsymbol{x} = \widetilde{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{x}$, kde $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ vznikne z $\boldsymbol{P}$ vynecháním jednoho stavu. Pokud má soustava v intervalu $[0,1]$ jen triviální řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, jsou všechny trvalé. Jestliže existuje netriviální řešení v intervalu $[0,1]$, jsou všechny stavy přechodné.

Příklad 5.1: (model výměny tepla) Uvažujme dvě urny, ve kterých je celkem $2l$ koulí očíslovaných $1, 2, \ldots, 2l$. V každém kroku se náhodně zvolí jedno číslo mezi $1, 2, \ldots, 2l$ a koule s daným číslem se přemístí do druhé urny. Počet koulí v urně reprezentuje teplotu tělesa a přemístění koule výměnu tepla. Označme X_n teplotu prvního tělesa (tj. počet koulí v první urně) v čase n. Ukažte, že $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ tvoří homogenní Markovův řetězec, najděte matici pravděpodobností přechodu, klasifikujte stavy řetězce a určete stacionární rozdělení.

Příklad 5.2: (model mísení dvou nestlačitelných kapalin) Mějme dvě urny, každá z nich obsahuje l koulí. Celkem máme $2l$ koulí, z toho l bílých a l černých. V každém časovém okamžiku probíhá proces mísení takto: v každé z uren náhodně zvolíme jednu kouli a přemístíme ji do opačné urny (výměna probíhá současně). Náhodná veličina X_n udává počet bílých koulí v první urně v čase n. Ukažte, že posloupnost $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je homogenní Markovův řetězec, najděte matici pravděpodobností přechodu a klasifikujte stavy řetězce.

Příklad 5.3: Mějme tři přihrádky, do kterých umísťujeme kuličky (každá přihrádka může obsahovat maximálně jednu kuličku). V každém časovém okamžiku vybereme rovnoměrně náhodně jednu z přihrádek. Pokud není obsazena, vložíme do ní kuličku. Pokud je obsazena, s pravděpodobností $1/2$ z ní kuličku odebereme a s pravděpodobností $1/2$ kuličku ponecháme. Označme X_n počet obsazených přihrádek v čase n. Určete matici pravděpodobností přechodu Markovova řetězce $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$. Klasifikujte stavy řetězce a spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje). Předpokládejte, že počáteční rozdělení je rovnoměrné (každý stav má stejnou pravděpodobnost) a spočtěte absolutní pravděpodobnosti po jednom kroku.

Příklad 5.4: Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p & 0 \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 0 & p & 0 & 1-p \end{pmatrix},$$

kde $p \in (0,1)$. Spočtěte stacionární rozdělení.

V následujících úlohách je množina stavů nekonečná.

Příklad 5.5: Uvažujme posloupnost bernoulliovských pokusů. Pravděpodobnost zdaru je $p \in (0,1)$ a pravděpodobnost nezdaru $q = 1 - p$. Definujme X_n jako délku série zdarů, které jsme dosáhli v n-tém pokuse (pokud skončil n-tý pokus nezdarem, je $X_n = 0$). Ukažte, že posloupnost $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je homogenní Markovův řetězec, najděte matici pravděpodobností přechodu (i vyšších řádů), klasifikujte stavy řetězce a spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje).

Příklad 5.6: Mějme Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Určete stacionární rozdělení (pokud existuje) a klasifikujte stavy řetězce.

Příklad 5.7: Mějme Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\cdot 1} & \frac{1}{3\cdot 2} & \frac{1}{4\cdot 3} & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Určete stacionární rozdělení (pokud existuje) a klasifikujte stavy řetězce.

Příklad 5.8: Mějme Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde $0 < p_i < 1$ pro všechna $i \in \mathbb{N}_0$ a $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$. Určete stacionární rozdělení (pokud existuje) a klasifikujte stavy řetězce.

Příklad 5.9: Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Nalezněte stacionární rozdělení tohoto řetězce (pokud existuje).

Příklad 5.10: Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde $0 < p_i < 1$ pro všechna $i \in \mathbb{N}_0$ a $q_i = 1 - p_i$. Nalezněte stacionární rozdělení tohoto řetězce (pokud existuje).

Příklad 5.11: Leze slimák po nekonečně vysokém stromě, za každou hodinu s pravděpodobností 1/4 vyleze nahoru o jeden centimetr a s pravděpodobností 3/4 o jeden centimetr dolů sklouzne. Pokud je na zemi, popoleze o jeden centimetr nahoru s pravděpodobností 1. Označme X_n výšku (v centimetrech), ve které se slimák nachází po n hodinách. Určete matici pravděpodobností přechodu Markovova řetězce $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Klasifikujte stavy řetězce a spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje). Předpokládejte, že na počátku (v čase $n = 0$) je slimák na zemi a spočtěte absolutní pravděpodobnosti po třech hodinách.

Příklad 5.12: Aneta a Barbora hrají sérii šachových zápasů. Předpokládejme, že každá partie skončí s pravděpodobností 1/3 výhrou Anety, s pravděpodobností 1/3 remízou a s pravděpodobností 1/3 výhrou Barbory. Za výhru se získává jeden bod, za remízu půl bodu. Označme X_n absolutní hodnotu rozdílu získaných bodů obou hráček po n partiích. Určete matici pravděpodobností přechodu Markovova řetězce $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Klasifikujte stavy řetězce a určete stacionární rozdělení (pokud existuje).